

HUOLTOMATEMATIIKKA 2, MATERIAALI

SISÄLTÖ

- 1) Murtoluvut
- 2) Yhtenevyys ja yhdenmuotoisuus
- 3) Tasokuvioiden pinta-alat ja piirit
- 4) Kappaleiden tilavuudet
- 5) Suorakulmainen kolmio ja Pythagoran lause
- 6) Suorakulmaisen kolmion trigonometria

TIEDOT JA ESIMERKIT:

1) MURTOLUVUT

MURTOLUKUJA:

$$\frac{2}{5} ; \frac{3}{7} ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{3}$$

kuvallisesti	murtolukuna	sanallisesti
	osoittaja $\frac{2}{5}$ nimittäjä	<ul style="list-style-type: none"> • kaksi viidestä yhtäsuuresta • kaksi viidesosaa • kaksi kpl viidesosia • viidesosien määrä on kaksi • yksi kokonainen on jaettu viiteen yhtäsuureen osaan ja osia otettu kaksi

Kokonaisluku voidaan aina muuttaa murtoluvuksi:

$$\text{Esim. } 5 = \frac{5}{1} ; 100 = \frac{100}{1} ; 4 = \frac{8}{2}$$

SEKALUKUJA:

$$1\frac{1}{2} ; 2\frac{2}{5} ; 3\frac{4}{5} \quad \text{Huom! Sekaluvussa on + merkki välissä: } 1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

Sekaluku voidaan aina muuttaa murtoluvuksi:

$$2\frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5} \quad \text{tai} \quad 2\frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

ja päinvastoin jos nimittäjä on pienempi kuin osoittaja:

$$\frac{12}{4} = 3 \text{ (eli 4 menee lukuun 12 tasan 3 kertaa)}$$

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3} \text{ (eli 3 menee lukuun 17... 5 kokonaista kertaa ja jäljelle/jakamatta jää 2 kolmasosaa)}$$



DESIMAALILUVUT:

Desimaaliluku voidaan muuttaa murto- tai sekaluvuksi:

$$0,38 = \frac{38}{100} \qquad 1,263 = 1 \frac{263}{1000}$$

Murtoluku voidaan muuttaa desimaaliluvuksi, esim laskimella:

$$\frac{5}{8} = 5:8 = 0,625 \qquad 2 \frac{7}{8} = 2 + 7:8 = 2 + 0,875 = 2,875$$

LAVENTAMINEN JA SUPISTAMINEN:

- LAVENTAMINEN on KERTOLASKU, jossa KERROTAAN SAMALLA LUVULLA MURTOLUVUN MOLEMMAT OSAT (siis osoittaja sekä nimittäjä). Murtoluvun tulos ei tästä muutu!

$${}^2) \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{6}{18} \quad \text{Voitaisiin laventaa edelleen.}$$

- SUPISTAMINEN on JAKOLASKU, jossa JAETAAN SAMALLA LUVULLA MURTOLUVUN MOLEMMAT OSAT (siis osoittaja sekä nimittäjä). Murtoluvun tulos ei tästä muutu!

$$\frac{4}{12} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{24} \stackrel{(4)}{=} \frac{4}{6} \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} \quad \text{Ei voida supistaa enempää.}$$

SEURAAVISSA VIDEOISSA TIETOA LAVENTAMISESTA JA SUPISTAMISESTA:

<https://www.youtube.com/watch?v=wCLs26ot0cg>

<https://www.youtube.com/watch?v=TQ55N4ZA18>

MURTOLUVUILLA LASKEMINEN (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut)

MURTOLUKUJEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU ELI + JA – LASKUJEN PELISÄÄNNÖT:

- 1) Sekaluvut täytyy ensin muuttaa murtoluvuiksi
- 2) Murtoluvut täytyy olla ensin samannimisisiä eli ”alaosassa” täytyy olla samat luvut → tämän jälkeen lasketaan PELKÄT nimittäjät eli ”yläosat” yhteen tai vähennetään
- 3) Tulos supistetaan mahdollisimman pieneksi ja jos voidaan muutetaan sekaluvuksi

VINKKI: Samannimisiksi alaosat (eli nimittäjät) saadaan AINA kertomalla eli laaventamalla ne luvuksi, joka saadaan nimittäjien kertolaskulla!

$\frac{5}{7} + \frac{2}{3} \rightarrow$ koska $7 \cdot 3 = 21$, lavennetaan molempia murtolukuja niin, että nimittäjät (alaosat) muuttuvat luvuksi 21 →

$$\left(\frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 7}\right) + \left(\frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3}\right) = \frac{15}{21} + \frac{14}{21} = \frac{29}{21}$$

tämä on jo lopputulos, mutta vielä voi muuttaa sekaluvuksi $\frac{29}{21} = 1 \frac{8}{21}$

Esim. $1 \frac{1}{4} + \frac{5}{6} =$

1) ensin muutetaan sekaluku murtoluvuksi → $\frac{5}{4} + \frac{5}{6}$

2) muutetaan murtoluvut samannimisiksi (kertomalla nimittäjät luvuksi 24) → $\left(\frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 4}\right) + \left(\frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right) \rightarrow$
 $\frac{30}{24} + \frac{20}{24}$ ja lasketaan osoittajien (yläosan) yhteenlasku → $\frac{50}{24}$

3) muutetaan tulos sekaluvuksi (24 menee 50:een 2 kokonaista kertaa ja jää 2 jäljelle) → $2 \frac{2}{24}$
 → Supistetaan vielä $\frac{2}{24}$ kahdella → $2 \frac{2:2}{24:2} = 2 \frac{1}{12}$

KATSO MYÖS ALLA OLEVISTA LINKEISTÄ APUA JA SELITYSTÄ:

[1. MURTOLUKUJEN YHTEEN- JA VÄHENNYSLASKU](http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/) (<http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/>)

SEKÄ

[2. SEKALUKU MURTOLUVUKSI](http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/) (<http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/>)

MURTOLUKUJEN KERTOLASKU ELI * LASKUN PELISÄÄNNÖT:

- 1) Sekaluvut ja kokonaisluvut täytyy ensin muuttaa murtoluvuiksi
- 2) Murtolukujen osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään eli ”yläosat” kerrotaan keskenään ja ”alaosat” keskenään
- 3) Tulos supistetaan mahdollisimman pieneksi ja jos voidaan muutetaan sekaluvuksi

Esimerkki 1: $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 6} = \frac{4}{30}$

Lasku on vielä kesken...mitä pitäisi vielä tehdä ????

Esimerkki 2: $2 \cdot 2\frac{2}{3} =$

- 1) Ensin muutetaan kokonaisluku ja sekaluku murtoluvuiksi $\rightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{8}{3}$
- 2) Kerrotaan osoittajat (yläosa) sekä nimittäjät (alaosa) keskenään $\rightarrow \frac{2 \cdot 8}{1 \cdot 3} = \frac{16}{3}$
- 3) Muutetaan sekaluvuksi (3 menee 16:sta 5 kokonaista kertaa ja jää 1) $\rightarrow 5\frac{1}{3}$
ja koska enää ei voi supistaa, on tämä lopputulos!

KATSO MYÖS ALLA OLEVASTA LINKISTÄ APUA JA SELITYSTÄ:

[3. MURTOLUKUJEN KERTOLASKU](http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/) (<http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/>)

MURTOLUKUJEN JAKOLASKU ELI: LASKUN PELISÄÄNNÖT:

- a) Sekaluvut ja kokonaisluvut täytyy ensin muuttaa murtoluvuiksi
- b) *Muutetaan jakolasku kertolaskuksi* ottamalla jakajasta käänteisluku eli käännetään jälkimmäinen luku toisin päin ja vaihdetaan jakomerkin tilalle kertomerkki!
- c) Murtolukujen osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään eli ”yläosat” kerrotaan keskenään ja ”alaosat” keskenään
- c) Tulos supistetaan mahdollisimman pieneksi ja jos voidaan muutetaan sekaluvuksi

Esimerkki 1: $1\frac{1}{4} : 2\frac{1}{3} =$

- 1) Muutetaan sekaluvut murtoluvuiksi $\rightarrow \frac{5}{4} : \frac{7}{3}$
- 2) Muutetaan jakolasku kertolaskuksi, kääntämällä jakaja eli jälkimmäinen toisin päin (eli otetaan jakajasta käänteisluku) $\rightarrow \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7}$
- 3) Kerrotaan osoittajat (yläosa) sekä nimittäjät (alaosa) keskenään $\rightarrow \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$
ja koska tulosta ei voi enää supistaa, on tämä lopputulos!

KATSO MYÖS ALLA OLEVASTA LINKISTÄ APUA JA SELITYSTÄ:

[4. MURTOLUKUJEN JAKOLASKU](http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/) (<http://opetus.tv/maa/maa1/laskutoimituksia-murtoluvuilla/>)

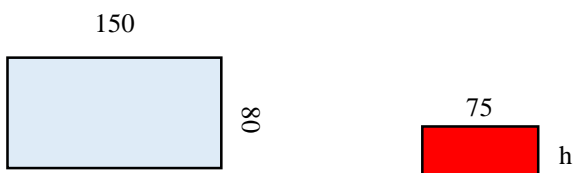
SEURAAVIIN AIHEISIIN HYVIÄ OPETUSVIDEOITA mm. TÄÄLTÄ: <https://opetus.tv/mab/mab2/>

2) YHTENEVYYS JA YHDENMUOTOISUUS

- Jos kaksi kuviota ovat täysin samankokoisia ja muotoisia, sanotaan niiden olevan yhteneviä.
- Jos kaksi kuviota ovat samanmuotoisia mutta erikokoisia, sanotaan niiden olevan yhdenmuotoisia.
- YHDENMUOTOISISSA KUVIOISSA toinen on siis toisesta suurennettu/pienennetty versio. Yhdenmuotoisten kuvioden mitat noudattavat samaa SUHDETTA.

HUOM! PIIRUSTUKSISSA OLEVAT MITAT OVAT AINA mm (millimetreinä!)

Esimerkki 1: Alla olevat suorakulmiot (sininen ja punainen) ovat yhdenmuotoisia. Selvitä h -sivun pituus.



Ratkaisu: Lasketaan ensin sivujen pituuksien suhde molempien kuvioden VASTAAVASTA TUNNETUSTA sivunpituudesta. Tässä tapauksessa molempien suorakulmioiden leveyksistä:

a) Suhde: $\frac{150 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} = 2$

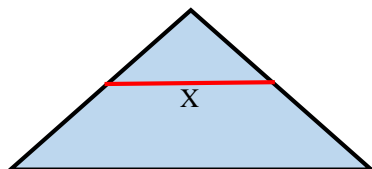
>>> eli sinisen suorakulmion leveys on 2 kertaa suurempi kuin punaisen suorakulmion leveys

>>> koska kuviot ovat yhdenmuotoisia, sinisen suorakulmion KAIKKI mitat ovat 2 kertaa suurempia kuin punaisessa, myös korkeus!

b) Punaisen suorakulmion korkeus $h = \frac{80 \text{ mm}}{2} = 40 \text{ mm}$

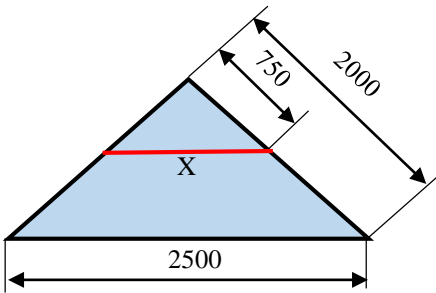
Esimerkki 2:

Kolmio on jaettu kahteen osaan punaisella viivalla X, joka on saman suuntainen kolmion kannan kanssa >> alkuperäinen iso kolmio ja syntynyt pikkukolmio ovat yhdenmuotoisia.



Esimerkki 2 jatkuu seuraavalla sivulla

Esimerkki 2: Laske punaisen viivan X pituus.



Ratkaisu:

a) Selvitetään ison ja pikkukolmion sivujen välinen suhde, niiden oikean kyljen pituuksista

$$\text{Suhde: } \frac{2000 \text{ mm}}{750 \text{ mm}} = 2,6666$$

eli ison kolmion KAIKKI sivun pituudet ovat 2,66666 kertaa pitempiä kuin pikkukolmiossa ja pikkukolmion sivun pituudet vastaavasti 2,666666 kertaa lyhempiä >> ratkaisu saadaan jakolaskulla

$$\text{b) } X = \frac{2500 \text{ mm}}{2,666666} = \underline{\underline{937,5 \text{ mm}}}$$

3) TASOKUVIDEN PINTA-ALAT JA PIIRIT

- Ennen pinta-alojen laskemista tulee tuntea niiden yksiköt.
- Pituuksien perusyksikkö on METRI (m) ja YSIKÖIDEN PERUSSUHDELUKU on 10
- Koska pinta-alat sisältävät ”kahteen suuntaan” olevia pituuksia
- >>>>>>> pinta-alan perusyksikkö on metri kertaa metri (m·m)
- >>>>>>> eli NELIÖMETRI (m²) JA YSIKÖIDEN PERUSSUHDELUKU on 100!

- Koska neliömetri on melko suuri yksikkö (siis metri kertaa metri suuruinen alue), tulee osata myös pinta-alojen yksikkömuunnokset. Tämän takia kerrataan kerrannaisyksiköt, joista käytetyimmät tässä:

Kilo	k	1000	10 ³
Hehto	h	100	10 ²
Deka	da	10	10 ¹
Perusyksikkö esim. m (metri)			
Desi	d	0,1 eli kymmenesosa	10 ⁻¹
Sentti	c	0,01 eli sadasosa	10 ⁻²
Milli	m	0,001 eli tuhannesosa	10 ⁻³

Pinta-aloissa käytetään usein myös yksiköitä **AARI ja HEHTAARI:**

- 1 AARI (a) on neliönä sivunpituudeltaan 10 m, eli pinta-alana 10 m · 10 m = 100 m²
- 1 HEHTAARI (ha) on neliönä sivunpituudeltaan 100 m, eli pinta-alana 100 m · 100 m = 10 000 m²

$$\gggg \quad 1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

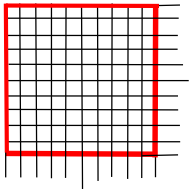
Esimerkki 1: a) Punainen viiva on 1 cm pitkä. Se on jaettu millimetreiksi, joita on 10 kpl.



$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

b) Punaisesta viivasta on tehty neliö, jonka kaikki sivut ovat siis 1 cm pitkiä

Syntyneen neliön pinta-ala A lasketaan $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$



Jos pinta-ala halutaan ilmoittaa neliömillimetreinä, näemme kuvasta että niitä on 10 kertaa 10 eli 100 kpl.

$$1 \text{ cm}^2 \text{ on siis } 100 \text{ mm}^2$$

NYRKKISÄÄNTÖ: PINTA-ALOJEN YKSIKKÖMUUNNOS ON ”TUPLATEN” SUHTEESSA PITUUKSIIN VERRATTUNA ELI TUPLATEN PILKUNSIIRTOJA!

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \text{ (suhde on 100 eli 2 pilkun siirtoa) } \gg \gg$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 \text{ (suhde on } 100 \cdot 100 \text{ eli } 10\,000 \text{ eli 4 pilkun siirtoa)}$$

Esimerkki 2:

$$15 \text{ km}^2 = \text{_____} \text{ m}^2$$

Ratkaisu: Kilometrin ja metrin välinen suhde on 1000 eli 3 pilkunsiirtoa. km^2 ja m^2 välinen suhde on $1000 \cdot 1000$ eli 1000 000 eli 6 pilkunsiirtoa

$$\gg \gg \gg \gg \gg 15 \text{ km}^2 = 15\,000\,000 \text{ m}^2$$

Esimerkki 3:

$$2000 \text{ cm}^2 = \text{_____} \text{ m}^2$$

Ratkaisu: Senttimetrin ja metrin välinen suhde on 100 eli 2 pilkunsiirtoa. cm^2 ja m^2 välinen suhde on $100 \cdot 100$ eli 10 000 eli 4 pilkunsiirtoa

$$\gg \gg \gg \gg \gg 2000 \text{ cm}^2 = 0,2 \text{ m}^2$$

Esimerkki 4:

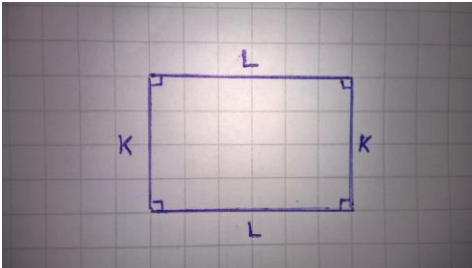
$$120 \text{ ha (hehtaari)} = \text{_____} \text{ m}^2$$

Ratkaisu: 1 ha $100 \text{ m} \cdot 100 \text{ m}$ eli suhde on 10 000 eli 4 pilkunsiirtoa

$$120 \text{ ha (hehtaari)} = 1200\,000 \text{ m}^2$$

PIIRI ELI YMPÄRYSMITTA SEKÄ PINTA-ALA

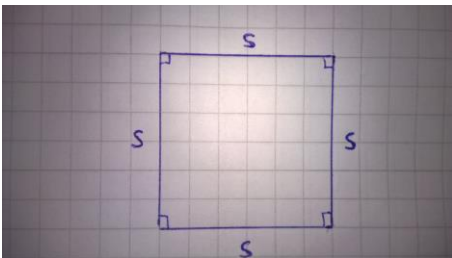
SUORAKULMIO:



$$\text{Piiri } p = L+K+L+K \quad \text{tai} \quad p = 2 \cdot L + 2 \cdot K$$

Pinta-ala $A = L \cdot K$ eli kanta \cdot kohtisuora korkeus

NELIÖ:

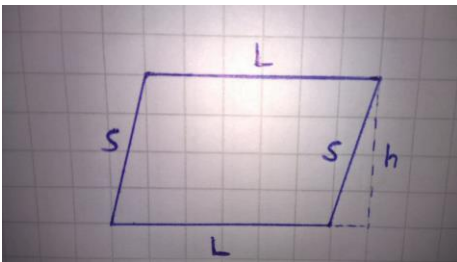


$$\text{Piiri } p = S+S+S+S \quad \text{tai} \quad p = 4 \cdot S$$

Pinta-ala $A = S \cdot S$ eli kanta \cdot kohtisuora korkeus

$$\text{tai} \quad A = S^2 \gg S = \sqrt[2]{A}$$

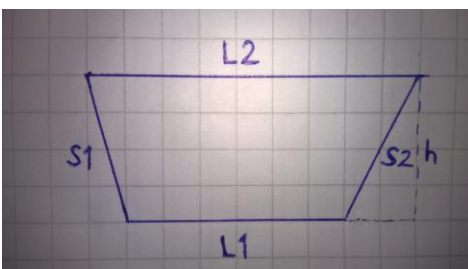
SUUNNIKAS:



$$\text{Piiri } p = L+S+L+S \quad \text{tai} \quad p = 2 \cdot L + 2 \cdot S$$

Pinta-ala $A = L \cdot h$ eli kanta \cdot kohtisuora korkeus

PUOLISUUNNIKAS:

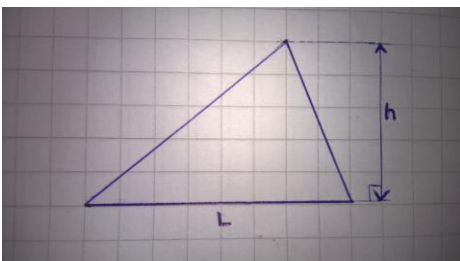


$$\text{Piiri } p = L1+S1+L2+S2$$

$$\text{Pinta-ala } A = \frac{L1+L2}{2} \cdot h$$

samansuuntaisten sivujen keskiarvo \cdot niiden välinen etäisyys

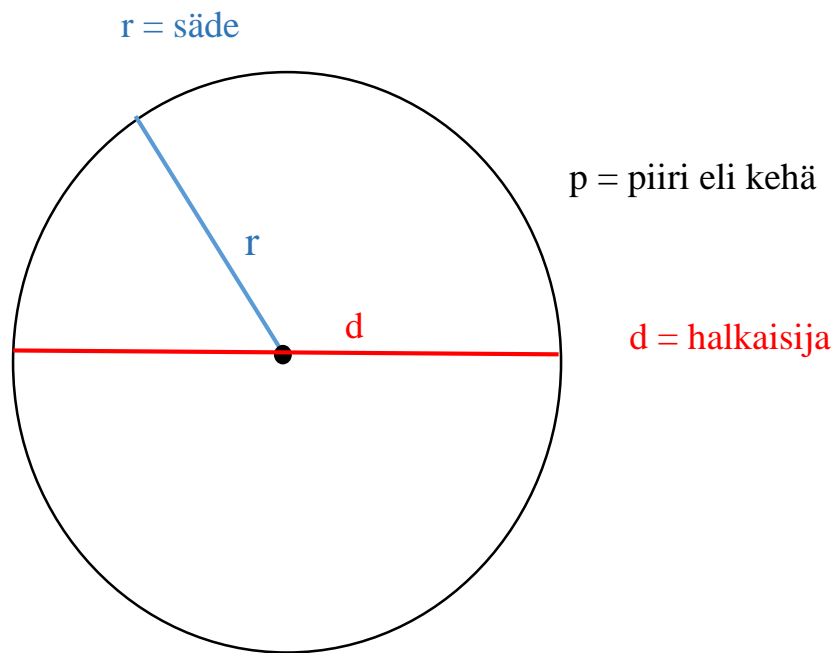
KOLMIO:



Piiri $p =$ kolmen sivun pituuksien summa

Pinta-ala $A = \frac{L \cdot h}{2}$ eli kolmion ympäri piirretyn suorakulmion puolikas

YMPYRÄ:

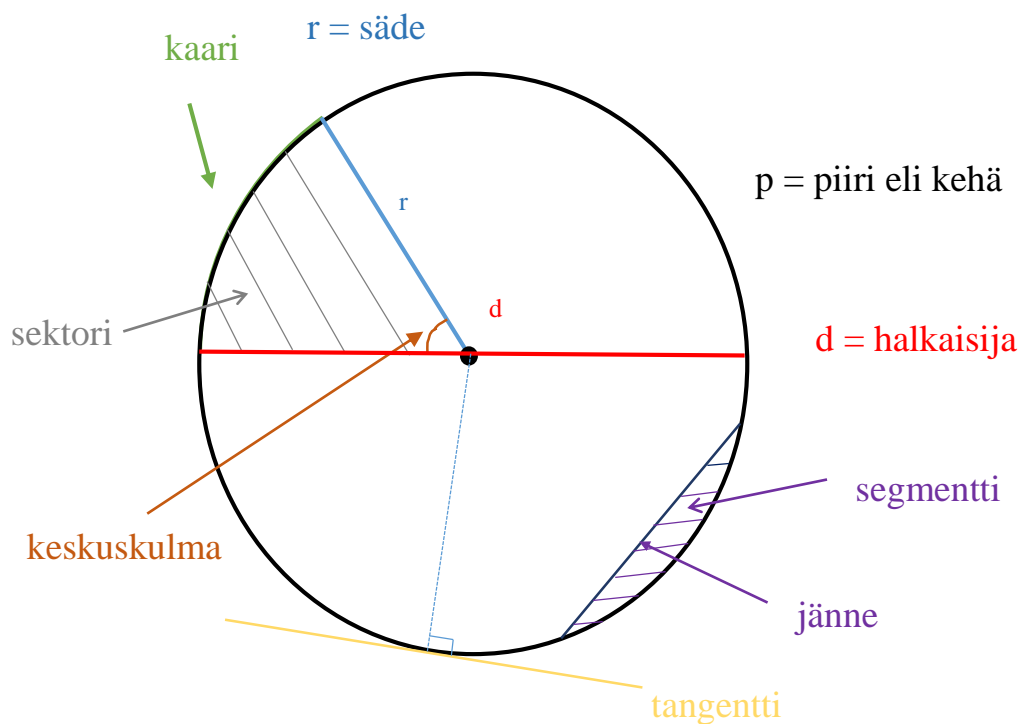


Ympyrän piiri eli kehän pituus $p = \pi \cdot d$

π on ympyrän kehän suhde halkaisijaan eli $\frac{p}{d}$ ja lukuna päättymätön desimaali, $\approx 3,1416$

Ympyrän pinta-ala $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ tai $A = \pi \cdot r^2$ eli $\pi \cdot r \cdot r$

SÄDE r on PUOLET HALKAISIJASTA d



3) KAPPALEIDEN TILAVUUDET

- Ennen tilavuuksien laskemista tulee tuntea niiden yksiköt.
- Pituuksien perusyksikkö on METRI (m) ja YKSIKÖIDEN PERUSSUHDELUKU on 10
- Koska tilavuudet sisältävät ”kolmeen suuntaan” olevia pituuksia

>>>>>>> tilavuuden perusyksikkö on metri kertaa metri kertaa metri (m·m·m)

>>>>>>> eli KUUTIOMETRI (m³) JA YKSIKÖIDEN PERUSSUHDELUKU on 1000!

TARKEÄÄ: 1 LITRA MAHTUU KUUTIOON JONKA KAIKKI SIVUT OVAT 1 DESIMETRI PITKIÄ >>>>> 1 litra (l) = 1 kuutiodesimetri (dm³)

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ 000 cm}^3 = 1000 \text{ l (litraa)}$$

Esim. 1: Mopon sylinteritilavuus on 50 cm³. Paljonko se on litroina?

50 cm³ muutetaan dm³ (kuutiodesimetreiksi eli litroiksi). cm ja dm suhde on 10, mutta kuutiona muutos on 10·10·10 eli 1000. Tällöin pilkkua siirretään 3 kertaa. Jos yksikkö pienenee niin luku suurenee >> nyt yksikkö suurenee >> pilkkua siirretään siis vasemmalla

$$50 \text{ cm}^3 = 0,000 \text{ 05 dm}^3 \text{ eli } 0,00005 \text{ litraa}$$

Esim. 2: Auton moottorin sylinteritilavuus on rekisteriotteen mukaan 2490 cm³. Paljonko se on litroina?

cm³ ja dm³ välinen suhde on 1000 eli 3 pilkunsiiirtoa ja vasemmalle

$$2490 \text{ cm}^3 = 2,490 \text{ dm}^3 \text{ eli } 2,49 \text{ litraa}$$

Esim. 3: 2,5 kuution (m³) jäteöljysäiliö on täynnä. Montako litraa jäteöljyä on?

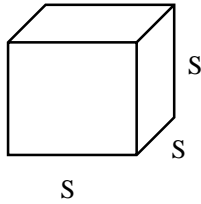
m³ ja dm³ välinen suhde on 1000 eli 3 pilkunsiiirtoa. Koska yksikkö pienenee, luku suurenee >> pilkkua siirretään siis oikealle!

$$2,5 \text{ m}^3 = 2500 \text{ dm}^3 \text{ eli } 2500 \text{ litraa}$$

KAPPALEIDEN TILAVUUDET:**NYRKKISÄÄNTÖ** PERUSKAPPALEIDEN TILAVUUKSIEN LASKEMISEEN:

KAPPALEEN TILAVUUS ON POHJAN PINTA-ALA KERTAA SEINIEN KORKEUS!!!!

KUUTIO sekä Suorakulmainen särmiö eli ”LAATIKKO”



KUUTIO: Kaikki sivut ovat yhtä pitkiä!

Tilavuus $V = \text{pohjan pinta-ala} \cdot \text{korkeus}$

$$V = A \cdot S = (S \cdot S) \cdot S$$

$$\text{tai } V = S^3 \ggg S = \sqrt[3]{V}$$

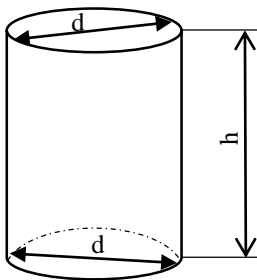


Suorakulmainen särmiö:

Tilavuus $V = \text{pohjan pinta-ala} \cdot \text{korkeus}$

$$V = A \cdot K = (L \cdot S) \cdot K$$

Lieriö eli ”SYLINTERI”



Lieriö:

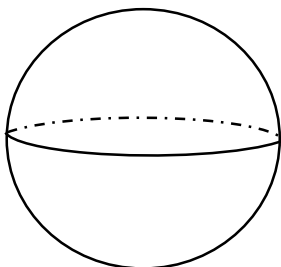
Tilavuus $V = \text{pohjan pinta-ala} \cdot \text{korkeus}$

$$V = A \cdot h = (\pi \cdot r^2) \cdot h$$

Vaipan ala A on piiri kertaa korkeus

$$A = (\pi \cdot d) \cdot h$$

PALLO

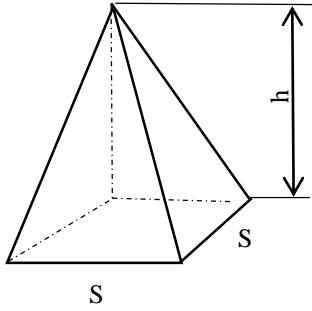


Pallo:

$$\text{Tilavuus } V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

$$\text{Vaipan ala } A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

PYRAMIDI (pohja on neliö, tilavuus on kolmasosa vastaavan suorakulmisen särmiön tilavuudesta)

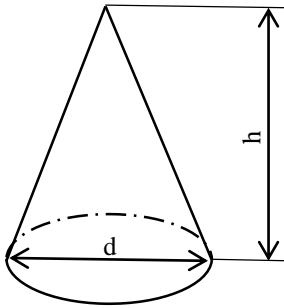


Pyramidin pohja on neliö:

$$\text{Tilavuus } V = \frac{\text{pohjan pinta-ala} \cdot \text{korkeus}}{3}$$

$$V = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{(s \cdot s) \cdot h}{3}$$

KARTIO (pohja on ympyrä, tilavuus on kolmasosa vastaavan lieriön tilavuudesta)



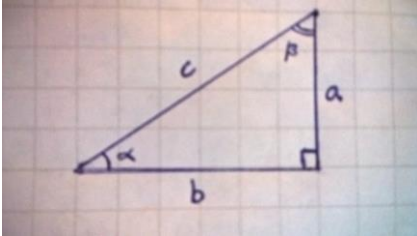
Kartion pohja on ympyrä:

$$\text{Tilavuus } V = \frac{\text{pohjan pinta-ala} \cdot \text{korkeus}}{3}$$

$$V = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{(\pi \cdot r^2) \cdot h}{3}$$

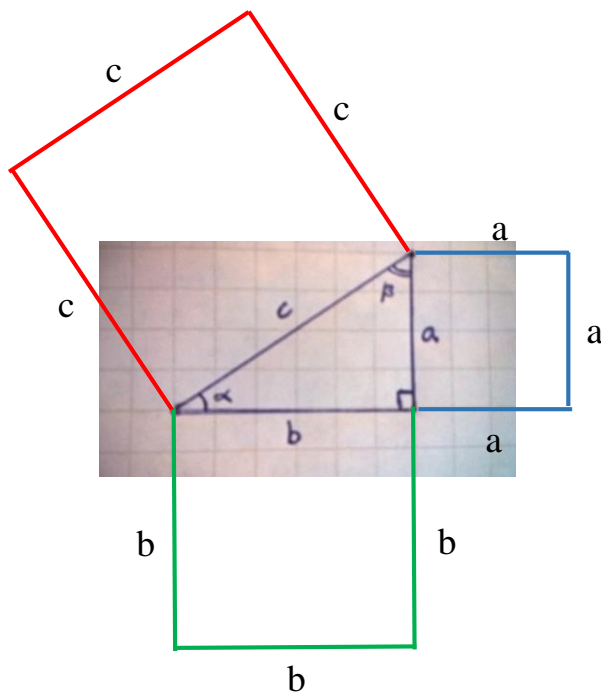
5) SUORAKULMAINEN KOLMIO JA PYTHAGORAN LAUSE

- Kolmioissa on nimensä mukaisesti kolme kulmaa.
- Kolmion kulmien yhteenlaskettu suuruus on aina 180°
- Suorakulmaisessa kolmiossa yksi kulma on tasan 90° jota sanotaan suoraksi kulmaksi



- Suorakulmaisen kolmion sivuilla on omat nimensä: a = kateetti, b = kateetti, c = hypotenuusa
- Hypotenuusa on aina
 - * Suorakulmaa vastapäätä
 - * PISIN sivu kolmiosta

PYTHAGORAN LAUSE



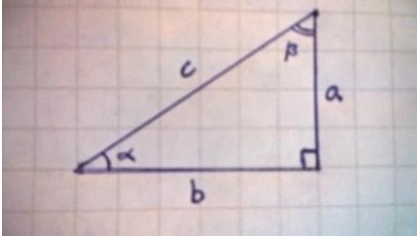
- Kreikkalainen Pythagoras (syntyi 570 ekr ja kuoli 495 ekr) selvitti ja todisti mikä yhteys suorakulmaisen kolmion sivuilla on toisiinsa.
- Kuten yllä olevasta kuvastakin huomaat, a (4 ruutua) + b (6 ruutua) EI OLE c:n pituus! c:n pituus on vähemmän kuin 10 ruutua!
- Pythagoras oivalsi, että kateettien (lyhyemmät sivut) a ja b ympäri piirrettyjen NELIÖIDEN PINTA-ALOJEN SUMMA ON SAMA KUIN hypotenuusan ympäri piirretyn NELIÖN PINTA-ALA!
- Koska neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, saadaan Pythagoran lause kirjoitettua matemaattisesti $a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$ joka voidaan kirjoittaa muotoon $a^2 + b^2 = c^2$

- Mihin Pythagoran lausetta voi sitten käyttää? Ainakin kahteen asiaan!

ASIA 1: Jos suorakulmaisesta kolmiosta tiedetään kahden sivun pituus, voidaan Pythagoran lauseen avulla laskea kolmannen sivun pituus. Alla ratkaistut kaavat:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Esimerkki 1: Kuvan kolmiossa kateetti a on 4 ruutua ja kateetti b 6 ruutua, montako ruutua pitkä on hypotenuusa c?



Kysytään siis pisimmän sivun eli hypotenuusan pituutta, jolloin lasketaan lyhyempien sivujen (kateettien) ympäri piirrettyjen neliöiden pinta-alat yhteen ja vastauksesta otetaan neliöjuuri:

$c = 4 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 16 + 36 = 52$ (= kateettien neliöiden summa) >>> ja sitten otetaan vielä neliöjuuri neliöiden summasta

$$c = \sqrt{52} = 7,2111 \text{ ruutua}$$

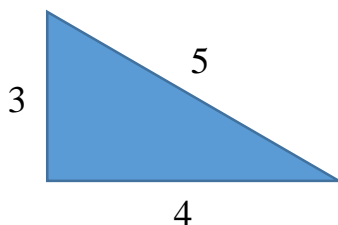
Tämä esimerkki laskettiin siis osissa, ei suoraan ratkaistulla kaavalla!

Esimerkki 2: Jos kolmion hypotenuusa c on 100 mm ja kateetti a on 60 mm, niin kuinka pitkä on kateetti b?

Ratkaistaan tämä tehtävä suoraan ratkaistulla kaavalla $= \sqrt{c^2 - a^2}$

$$b = \sqrt{(100 \text{ mm})^2 - (60 \text{ mm})^2} = \sqrt{10000 \text{ mm}^2 - 3600 \text{ mm}^2} = \sqrt{6400 \text{ mm}^2} = 80 \text{ mm}$$

ASIA 2: Kulma on AINA suora, jos se toteuttaa Pythagoran lauseen. Tästä on olemassa helposti muistettava ”raksamiehen kolmio”, eli mitat jotka varmistavat kulman olevan TASAN 90°



- Jos halutaan varmistaa että jokin kulma on suora eli 90° mitataan kulmasta toiseen suuntaan 3 ja toiseen suuntaan 4 ja merkitään kohdat. Jos merkittyjen kohtien väli on tasan 5 on kulma tasan 90° eli suora!

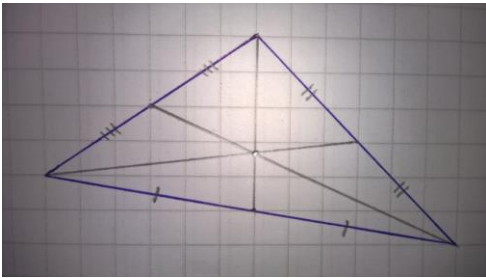
- Toki 3, 4, 5 lukujen kerrannaisetkin toteuttavat suoran kulman, esim. 6, 8, 10...30, 40, 50...60, 80, 100

- ja lukujen pituusyksiköt voivat tietysti olla mitä vaan; millimetrejä, senttimetrejä, metrejä...

- SUORAKULMA TOTEUTUU SIIS LUVUILLA 3, 4 ja 5 (sekä niiden kerrannaisilla)! OPETTELETHAN KÄYTTÄMÄÄN

Kolmiolla on useita erikoispisteitä, joista yksi on kuvattu alla:

- Jos piirrämme jokaisesta kolmion kärjestä viivan vastakkaisen sivun puoleen väliin, on viivojen leikkauspiste **KOLMION PAINOPISTE!** Tässä kohtaa kolmio on tasapainossa.



Lisää tietoa erilaisista kolmioista sekä niiden erikoispisteistä löydät hakusanoilla ”kolmion erikoispisteet”. Alla pari hyvää linkkiä.

https://fi.wikipedia.org/wiki/Tasasivuinen_kolmio

<https://opetus.tv/mab/mab2/>

6) SUORAKULMAISEN KOLMION TRIGONOMETRIA

- Sini, Cosini ja Tangentti ovat TYÖKALUJA joilla saadaan selvitettyä suorakulmaisen kolmioiden kulmien suuruuksia asteina sekä sivujenkin pituuksia, kunhan kolmiosta tiedetään kaksi muuta tietoa.

Kulman Sini on $\frac{\text{vastaisen sivun pituus}}{\text{hypotenuus pituus}}$

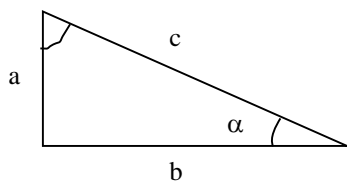
Kulman Cosini on $\frac{\text{viereisen sivun pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$

Kulman Tangentti on $\frac{\text{vastaisen sivun pituus}}{\text{viereisen sivun pituus}}$

$$\sin \alpha = a / c$$

$$\cos \alpha = b / c$$

$$\tan \alpha = a / b$$



- **Kun kulman sinistä, cosinista tai tangentista otetaan käänteisarvo eli laskimessa \sin^{-1} ; \cos^{-1} ; \tan^{-1} >>> Saadaan kulman suuruus ASTEINA!**

Esimerkki 1. Kuvan kolmion kateetti b on 120 mm ja hypotenuusa c 170 mm. Kuinka suuri on kulma α asteina?

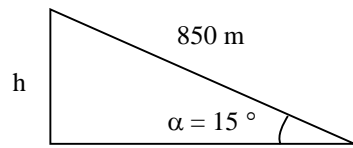
Ratkaisu: Koska kulmalle α on tiedossa viereisen sivun pituus ja hypotenuusan pituus, on ratkaisun työkaluksi valittava Cosini.

$$\cos \alpha = \frac{120 \text{ mm}}{170 \text{ mm}} = 0,70588 \quad \text{eli cosini kulmasta } \alpha \text{ on } 0,70588$$

sitten ratkaistaan kulman suuruus ASTEINA

$$\cos \alpha = 0,70588 \gg \gg \alpha = \cos^{-1} 0,70588 = \underline{\underline{45,099^\circ \approx 45,1^\circ}}$$

Esimerkki 2: Kuinka korkea (h) on mäki, jonka pituus on trippimittarin mukaan 850 m ja nousukulma on 15° ?



Ratkaisu:

a) Valitaan oikea työkalu. Kulmasta katsottuna kysytään vastaisen sivun pituutta ja hypotenuusa tiedetään >> työkalu tulee olla siis Sini

b) Sijoitetaan tiedetyt ja kysytyt asiat työkaluun

$$\sin 15^\circ = \frac{h}{850 \text{ m}}$$

Kyseessä on siis tekijäyhtälö, jonka voi ratkaista esim. aikaisemmin opitulla kolmiomallilla

$$\gggggg h = \sin 15^\circ \cdot 850 \text{ m}$$

Ja seuraavaksi lasketaan laskimella (HUOM! Käytä laskimesta Sin –painiketta)

$$h = 0,258819 \cdot 850 \text{ m} = 219,996 \text{ m} \approx \underline{\underline{220 \text{ m}}}$$