KORJAUSMATIIKKA 3, MATERIAALI

SISÄLTÖ

TIEDOT JA ESIMERKIT:

1) POTENSSI

Mikä on potenssi matematiikassa?

= Toistuvien kertolaskujen merkintä- ja laskutapa

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ $\quad X \cdot X \cdot X \cdot X \cdot X = X^5$ $\quad 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

$5^3 \leftarrow$ eksponentti

kantaluku

= Eksponentti kertoo, montako kertaa kantaluku kerrotaan itsellään!

* Kannattaa katsoa tästä opetus.tv linkistä myös aiheesta: https://opetus.tv/maa/maa1/potenssi-ja-sen-laskusaannot/

* Kantaluvun toista potenssia sanotaan myös **neliöksi,** esim. m^2 on neliömetri
* Kantaluvun kolmatta potenssia sanotaan **kuutioksi**, esim. m^3 on kuutiometri

* Laskimissa on erilaisia potenssipainikkeita, esim. seuraavia on käytössä:

X^2 -painike antaa tulokseksi valitsemasi kantaluvun neliön

X^3 -painike antaa tulokseksi valitsemasi kantaluvun kuution

X^y, Y^x, a^x, $X^{\square}$ -painikkeet antavat tulokseksi valitsemasi kantaluvun ja eksponentin tuloksen

10^x -painike antaa tulokseksi valitsemasi luvun kymmenen potenssin

$x10^x$ -painike antaa tulokseksi valitsemasi luvun kerrottuna valitsemallasi kymmenen potenssilla

Esimerkkitehtäviä:

a) $12^2 = 12 \cdot 12 = 144$
tai laskimella: $12 \rightarrow X^2 = 144$
tai laskimella: $12 \rightarrow X^{\square} \rightarrow 2 = 144$

VOIT SIIS ITSE VALITA, MITÄ TAPAA KÄYTÄT POTENSSILASKUJEN LASKEMISEEN

b) $2^{20} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1\,048\,576$
tai laskimella: 2 → **X**$^{\square}$ → 22 = 1 048 576

c) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$
Tässä tapauksessa kantalukuna on +5 eli toiseen korotus vaikuttaa ainoastaan lukuun 5, ei sen edessä olevaan - merkkiin

d) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$
Tässä tapauksessa kantalukuna on -5 ja merkkisäännön mukaan parillinen määrä -lukuja kertolaskuissa tuottaa positiivisen eli + vastauksen

e) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
Pariton määrä miinuslukuja kertolaskussa tuottaa - vastauksen

f) $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$
tai laskimella: **10^{x}** → 6 = 1 000 000

g) $2{,}57 \cdot 10^9 = 2{,}57 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,570\,000\,000$
tai laskimella: 2,57 → **x10^{x}** → 9 = 2 570 000 000

<u>POTENSSIN LASKUSÄÄNTÖJÄ eli PELISÄÄNNÖT:</u>

1) Miinuseksponentin - merkki häviää, kun otat potenssista käänteisluvun

Esim. $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Esim. $X^{-3} = \frac{1}{X^3}$

Esim. $(\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$

Esim. $(\frac{X}{Y})^{-2} = (\frac{Y}{X})^2 = \frac{Y^2}{X^2}$

Esim. $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000} = 0{,}000\,001$

Esim. $17{,}5 \cdot 10^{-3} = 17{,}5 \cdot 0{,}001 = 0{,}0175$

* Kymmenenpotenssit siirtävät siis ainoastaan pilkkua. Positiivinen eksponentti siirtää pilkkua oikealle ja negatiivinen eksponentti vasemmalle, eksponentin luvun verran

Esim. $2{,}54 \cdot 10^4$ = 2,54 siirretään pilkkua 4 kertaa oikealle → 25,4,0,0,0 eli 25400,0 eli 25 400

Esim. $25 \cdot 10^{-3}$ = 25,0 siirretään pilkkua 3 kertaa vasemmalle → 0,0,2,50 eli 0,0250 eli 0,025

Esim. 36 000 000 000 = $36 \cdot 10^9$ eli 10^9 korvasi 9 nollaa/pilkunsiirtoa luvun perästä

Esim. 0,000 000 12 = $12 \cdot 10^{-8}$ eli 10^{-8} korvasi 8 pilkunsiirtoa luvun edestä

2) Samankantaisten potenssien tulossa (kertolaskussa) eksponentit lasketaan yhteen

Esim. $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5 = 3\,125$

Esim. $X^4 \cdot X^3 = X^{4+3} = X^7$

Esim. $a^{-3} \cdot a^5 = a^{-3+5} = a^2$

3) Samankantaisten potenssien osamäärässä (jakolaskussa) eksponentit vähennetään toisistaan (osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti)

Esim. $\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

Esim. $\frac{X^5}{X^3} = X^{5-3} = X^2$

Esim. $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

Esim. $\frac{X^{-4}}{X^{-2}} = X^{-4-(-2)} = x^{-2} = \frac{1}{X^2}$

4) Osamäärän potenssissa sulkujen ulkopuolelle oleva eksponentti vaikuttaa molempiin, sekä osoittajaan että nimittäjään

Esim. $(\frac{a}{x})^2 = \frac{a^2}{x^2}$

5) Tulon potenssissa sulkujen ulkopuolella oleva eksponentti vaikuttaa kaikkiin kerrottaviin

Esim. $(a \cdot x)^3 = a^3 \cdot x^3$

6) Potenssin potenssissa sulkujen sisällä ja ulkopuolella olevat eksponentit kerrotaan keskenään

Esim. $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$

7) Jos eksponenttina on nolla, on tulos aina 1 (kunhan kantaluku ei ole nolla)

Esim. $5^0 = 1$ $\quad X^0 = 1$ $\quad (-7)^0 = 1$ $\quad (\frac{2}{3})^0 = 1$

<u>SOVELTAVA ELI KÄYTÄNNÖN TEHTÄVÄ</u>
* Taitat yhtä isoa paperia kaksin kerroin toistamiseen 14 kertaa. Tämän jälkeen leikkaat saksilla paperinipusta kaikki kulmat pois. Onnistutko tässä? Paperi on 0,1 mm paksu.

1. taitos = 2 paperia päällekkäin, 2. taitos = 4 paperia päällekkäin, 3. taitos = 8 paperia päällekkäin jne. Tällöin taittelu toteuttaa kerolaskua luvulla 2 eli $2 \cdot 2 \cdot 2\ldots$ aina 14 kertaan asti

Potenssina merkittynä paperien määrä on 14 taitoksen jälkeen siis 2^{14} ja tulos on 16 384
Koska yksi paperi on 0,1 mm paksu ja papereita on 16 384 kpl päällekkäin, on paperinippu 16 384 · 0,1 mm = 1638,4 mm = 1,6384 m <u>VASTAUS: Ei onnistu leikkaus yli 1,6 metriseen paperipinoon.</u>

2) JUURI

Mikä on juuri? Neliöjuuri, kuutiojuuri, viides juuri?

$\sqrt[2]{16} = \pm 4$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[5]{3125} = 5$

Juuri

$$\sqrt[3]{27}$$

Juurrettava

Juuren ottaminen vastaa kysymykseen: Mikä luku on kerrottu itsellään ”Juuren” verran, jotta on saatu ”Juurrettava”?

Eli $\sqrt[3]{27}$ voidaan muotoilla kysymykseksi: Mikä luku on kerrottu 3 kertaa itsellään, jotta on saatu 27

Päättelemällä/päässälaskuna saattaa selvitä, että vastaus on 3, sillä $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

* Toisen (2) juuren ottamista sanotaan myös neliöjuureksi
* Kolmannen (3) juuren ottamista sanotaan myös kuutiojuureksi

HUOM! JOS JUURIMERKINTÄ PUUTTUU, ON JUURI AINA LUKU 2 ELI NELIÖJUURI!

$\sqrt{8} = \sqrt[2]{8}$

* Laskimissa on erilaisia juuripainikkeita, esim. seuraavia on käytössä:

$\sqrt[2]{\quad}$ -painike antaa tulokseksi valitsemasi juurrettavan neliöjuuren

$\sqrt[3]{\quad}$ -painike antaa tulokseksi valitsemasi juurrettavan kuutionjuuren

$\sqrt[x]{\quad}$, $\sqrt[x]{y}$, $\sqrt[y]{x}$ -painikkeet antavat tulokseksi valitsemasi juuren ja juurrettavan tuloksen

Esimerkkitehtäviä:

a) $\sqrt[2]{9}$ = +3 tai - 3
Myös -3 on mahdollinen vastaus, koska $-3 \cdot -3 = +9$!

b) $\sqrt[3]{8}$ = +2
-2 ei ole mahdollinen tulos, koska $-2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$

c) $\sqrt[3]{-27}$ = -3
+3 ei ole mahdollinen tulos, koska $3 \cdot 3 \cdot 3 = +27$

d) $\sqrt[2]{-9}$ = EI RATKAISUA!
Koska $3 \cdot 3 = +9$ sekä $-3 \cdot -3 = +9$

JUUREN LASKUSÄÄNTÖJÄ eli PELISÄÄNNÖT:

1) Tulon juuri

Esim. $\sqrt{XY} = \sqrt{X} \cdot \sqrt{Y}$ **(Huom. Tämä toimii myös toiseen suuntaan)**

Esim. $\sqrt{4 \cdot 64} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{64} = 2 \cdot 8 = 16$

2) Osamäärän juuri (Huom. Tämä toimii myös toiseen suuntaan)

Esim. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Esim: $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

3) Potenssin juuri

Esim. $\sqrt[2]{X^4} = X^{\frac{4}{2}} = X^2$

Esim. $\sqrt[3]{4^6} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$

4) Juuri luvusta 0

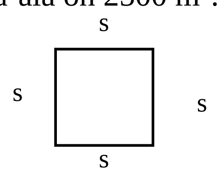
Esim. $\sqrt{0} = 0$

Esim. $\sqrt[3]{0} = 0$

SOVELTAVAT ELI KÄYTÄNNÖN TEHTÄVÄT

1) Neliömallisen tontin pinta-ala on 2500 m^2. Paljonko tarvitset lankaa, jos tarkoitus on aidata koko tontti langalla?

RATKAISU:



Neliön jokainen sivu (s) on yhtä pitkä. Neliönmallisen tontin pinta-ala lasketaan sivu kertaa sivu eli

$s \cdot s = 2500\ m^2$ eli potenssina merkittynä $s^2 = 2500\ m^2$

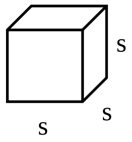
Koska tavoitteena on selvittä yhden sivun, s pituus, pitää s^2 potenssista saada ^{2} pois. Matemaattisesti eksponentin kaksi poistaa neliöjuuri. Täytyy muistaa, että yhtälön molemmille puolille täytyy aina tehdä sama asia, joten otetaan neliöjuuri molemmilta puolilta yhtälöä

$\sqrt[2]{s^2} = \sqrt[2]{2500\ m^2} \rightarrow s = 50$ m

Koska lanka kiertää kaikki 4 sivua tontilta, on narun tarve $4 \cdot 50$ m = 200 m

Vastaus: 200 m

2) Sinun tulee tehdä kuution mallinen säiliö autoon. Säiliön tilavuus tulee olla 20 litraa. Minkä kokoiset levyt leikkaat säiliöön?



Ratkaisu: Kuution kaikki sivut ovat saman pituiset (s). Kuutio tilavuus lasketaan leveys kertaa syvyys kertaa korkeus eli $s \cdot s \cdot s$ eli s^3

s^3 = 20 litraa

Kuten jo edellisessä tehtävässä opittiin, eksponentin supistaa vastaava juuri eli tässä tapauksessa ^{3} supistuu pois ottamalla $\sqrt[3]{\ }$. Muistathan ottaa kuutiojuuren yhtälön molemmilta puolilta!
Koska sivun pituutta selvitetään, on litra hieman huono yksikkö tähän. Muutetaan siis ensin yksikkö litra paremmaksi yksiköksi tähän tehtävään

20 litraa = 20 dm^3 = 20 000 cm^3 $\rightarrow$ valitaan tilavuudeksi 20 000 cm^3 jolloin sivun pituudeksi saadaan luku senttimetreinä

$s^3 = 20\,000\ cm^3$ $\rightarrow$ otetaan kuutiojuuri yhtälön molemmilta puolilta $\sqrt[3]{s^3} = \sqrt[3]{20\,000\ cm^3}$

$\rightarrow$ s = 27,144176 cm

Vastaus: Leikataan 27,15 cm x 27,15 cm kokoisia levyjä

3) POLYNOMIT

Mikä tai mitä on polynomi?

Osaatko ratkaista seuraavan polynomin? Montako hymynaamaa ja montako murjottavaa?

3☺+5☹+2☺-3☹

Jos osasit, opit myös matematiikan polynomit!
Kannattaa katsoa myös opetus.tv videot aiheesta: https://opetus.tv/mab/mab1/polynomit/

Lainaus Wikipediasta:
”Matematiikassa polynomi on lauseke, joka saadaan yhdestä tai useammasta muuttujasta ja vakioista yhteen-, vähennys- ja kertolaskulla, sekä positiiviseen kokonaislukueksponentin osoittamaan potenssiin korottamisella.”

Eli…

* Polynomissa on kirjaimia, joita sanotaan termeiksi. Termi on luku, jota ei tiedetä ja sitä merkitään siis kirjaimella, esim. X tai Y tai Z tai jollain muulla aakkosella.

* Termillä voi olla kerroin edessä ja vielä astelukukin (eli eksponentti)

esim. $5X^3$ on termi, jossa 5 on kerroin ja ^{3} on asteluku

* Polynomissa voi olla mukana myös pelkkiä lukuja, eli vakiotermejä
esim. $5X^3 + 7$ on polynomi, jossa $5X^3$ on termi ja 7 on vakiotermi

* Usein polynomitehtävissä on tarkoitus laskea yhteen, vähentää ja kertoa termejä, jotta polynomista saadaan lyhyempi (sievennetään).

Esimerkkitehtävä 1: Sievennä Polynomi

$3 \cdot X+5 \cdot Y+2 \cdot X-3 \cdot Y$ (Yleensä tuota kertomerkkiä EI merkitä kertoimen ja kirjaimen väliin lainkaan!)

Ratkaisu: Et tiedä mikä luku X tai Y on, mutta sen tiedät etteivät ne ole samoja lukuja (koska ne on merkitty eri kirjaimilla). Kaikki polynomin X-kirjaimet tarkoittavat samaa lukua ja kaikki Y-kirjaimet jotain toista lukua!!!

Joten voimme laskea yhteen tai vähentää AINOASTAAN samoja kirjaimia sisältävät termit keskenään, eli esimerkissämme

$3X+5Y+2X-3Y \rightarrow 3X+2X$ ja $5Y-3Y \rightarrow$ tulokseksi saadaan $5X + 2Y$ ja tämä on vastaus!

Esimerkkitehtävä 2: Sievennä Polynomi

$5a^2 + 8c^3 - 12 + 2a^2 + 6 - 12a^2 + 2c^3$

Kun erilaisia termejä on paljon, kannattaa samat termit merkitä/koodata vaikka näin

$\underline{5a^2} + 8c^3 \underline{\underline{- 12}} + \underline{2a^2} \underline{\underline{+ 6}} \underline{- 12a^2} + 2c^3 \overline{\overline{- 5a^3}}$

nyt voi olla helpompi laskea termit yhteen/vähentää:

$\rightarrow 5a^2 + 2a^2 - 12a^2 = -5a^2$
$\rightarrow 8c^3 + 2c^3 = 10c^3$
$\rightarrow -12 + 6 = -6$
$\rightarrow -5a^3$

Huomasithan, että a^2 ja a^3 ovat ERI TERMEJÄ, joten ne lasketaan erikseen vaikka onkin sama kirjain mukana!

Tulos ilmoitetaan
* termien asteluvun (eksponentin) mukaiseen suuruusjärjestykseen
* ja termin etumerkki (+ tai -) mukaan otettuna eli

Vastaus: $-5a^3 + 10c^3 - 5a^2 - 6$

POLYNOMIEN LASKUSÄÄNTÖJÄ ELI PELISÄÄNNÖT:

1. Sulkujen poistaminen ja polynomien kertolasku
* Sinulle on ehkä opetettukin että sulkujen edessä oleva miinus (-) merkki, muuttaa sulkujen sisältä kaikki etumerkit päinvastaiseksi kun sulut poistetaan. Mutta sulkujen poistamiseen on yksi sääntö, joka pätee AINA.

SÄÄNTÖ: Kerro sulkujen edessä olevalla termillä kaikki sulkujen sisällä olevat termit. Näin sulut poistuvat! Jos sulkujen edessä on kertojana toiset sulut, kerro ensimmäisen sulun termeillä kaikki toisen sulun termit.

Esimerkkitehtävä 1: Sievennä polynomi

$5X - (3X + 5Y - 2X)$

- Ensin pitää poistaa sulut (sanoo laskujärjestyssääntö).
- Sulut poistetaan siis KERTOMALLA ne auki sulkujen edessä olevalla termillä

$5X - (3X + 5Y - 2X)$

tässä polynomissa on sulkujen edessä - merkki, mutta numero jota
ei kirjoiteta näkyviin on 1. Eli terminä ja kertojana on siis -1

- Kerrotaan siis -1:llä kaikki sulkujen sisällä olevat termit. Merkitään eri värisillä nuolilla kertolaskut

$5X - (3X + 5Y - 2X)$

tässä kertolaskut erikseen näytettynä (Merkkisäännön mukaan kertolaskussa; miinus voittaa plussan mutta aina kaksi miinusta muuttuu plussaksi):

sininen nuoli: $-1 \cdot +3X = -3X$
punainen nuoli: $-1 \cdot +5Y = -5Y$
musta nuoli: $-1 \cdot -2X = +2X$

- Kun sulut on aukikerrottu, näyttää polynomi tältä: $\underline{5X}\ \underline{-3X} - 5Y \ \underline{+ 2X}$
- lasketaan samannimiset termit yhteen/vähennetään niin homma on valmis $\rightarrow$ $4X - 5Y$

Esimerkkitehtävä 2: Sievennä polynomi

$4a + 5b - 2a(2a + 2 + 2b)$

- Kerrotaan taas ensin sulut auki. Nyt kertojana on -2a

sininen nuoli: $-2a \cdot +2a = -4a^2$ (Huom. tässä oli kaksi kertolaskua; $-2 \cdot +2 = -4$ ja $a \cdot a = a^2$ ja ne yhdistyvät termiksi $-4a^2$)
punainen nuoli: $-2a \cdot +2 = -4a$
musta nuoli: $-2a \cdot +2b = -4ab$

- Sulkujen aukikertomisen jälkeen polynomi näyttää tältä: $\underline{4a} + 5b -4a^2 \ \underline{- 4a} - 4ab$
- Lasketaan samojen termien miinuslasku ($4a - 4a = 0$) ja kirjataan tulos sovitussa järjestyksessä
$\rightarrow$ $- 4a^2 - 4ab + 5b$ ja tämä on vastaus

Esimerkkitehtävä 3: Sievennä polynomi

$(a - b)^2$

^{2} tarkoittaa että sulkeet kerrotaan itsellään $\rightarrow$ $(a - b) \cdot (a - b)$

- Sulut kerrotaan auki niin, että jokaisella ensimmäisen sulut termillä kerrotaan kaikki jälkimmäisten sulkujen termit eli KERROTAAN KAIKKI KAIKILLA kerran!

$(a - b) \cdot (a - b)$

Sininen: $+a \cdot +a = +a^2$
Punainen: $+a \cdot -b = -ab$
Musta: $-b \cdot +a = -ba$ (eli myös $-ab$)
Vihreä: $-b \cdot -b = +b^2$

- Polynomi näyttää sulkujen aukikertomisen jälkeen siis tältä: a^2 $\underline{-\ ab}$ $\underline{-\ ab}$ $+ b^2$
- Lasketaan samannimiset termit: $- ab - ab = -2ab$
- Merkitään vastaus aikaisemmin opitun säännön mukaisesti järjestykseen

$a^2 + b^2 - 2ab$ ja tämä on vastaus

2. Polynomien jakolasku

- Polynomien jakolaskussa voidaan jakaa eli supistaa vain samat termin osat keskenään

Esimerkkitehtävä 1: Supista polynomi

$\frac{10X}{2X}$ $\rightarrow$ $\frac{10}{2} = 5$ ja $\frac{X}{X} = 1 \rightarrow$ vastaus: $5 \cdot 1 = 5$

Esimerkkitehtävä 2: Supista polynomi

$$\frac{3X^3 + 12X^2 - X}{3X}$$

- Jakajalla 3X on jaettava/supistettava KAIKKI jaettavassa olevat termit erikseen

$\frac{3X^3}{3X} \rightarrow \frac{3}{3} = 1$ ja $\frac{X^3}{X} = +X^2 \rightarrow 1 \cdot +X^2 = +X^2$

$\frac{+12X^2}{3X} \rightarrow \frac{+12}{3} = +4$ ja $\frac{X^2}{X} = X \rightarrow +4 \cdot X = +4X$

$\frac{-X}{3X} \rightarrow \frac{-X}{3X}$ jossa voidaan laskea ainoastaan $\frac{-X}{X} = -1 \rightarrow \frac{-1}{3 \cdot 1} = \frac{-1}{3}$

Kirjoitetaan vastaus: $X^2 + 4X - \frac{1}{3}$

TAI Joillekin on ehkä helpompaa tehdä tämä supistamalla (joka on myös jakamista) eli ensin jaetaan jakolasku osiin

$$\frac{3X^3 + 12X^2 - X}{3X} = \frac{3X^3}{3X} + \frac{12X^2}{3X} - \frac{X}{3X}$$

ja sitten supistetaan

$$\frac{\cancel{3}^{1}\cancel{X^3}^{2}}{\cancel{3}_{1}\cancel{X}_{1}} + \frac{\cancel{12}^{4}\cancel{X^2}^{1}}{\cancel{3}_{1}\cancel{X}_{1}} - \frac{\cancel{X}^{1}}{3\cancel{X}_{1}} = 1X^2 + 4X - \frac{1}{3 \cdot 1} = X^2 + 4X - \frac{1}{3}$$

4) ENSIMMÄISEN ASTEEN YLEINEN YHTÄLÖN RATKAISU

Mikä on ensimmäisen asteen yhtälö? Mitä sillä tehdään?

- Yhtälössä on aina = merkki ja joitain termejä molemmin puolin = merkkiä
- Ensimmäisen asteen yhtälössä on yleensä vain 1 kirjain (yleensä X) ja sen suuruutta yritetään selvittää
- Ensimmäisen asteen yhtälö tarkoittaa sitä, että termeissä ei ole eksponentteja esim. ^{2} tai ^{3}

Osaatko päätellä seuraavan yhtälön ratkaisun? Eli mikä luku X täytyy olla jotta = -merkin molemmille puolille tulee sama luku.

$2 \cdot X = 10$

Jos osasit, opit myös ensimmäisen asteen yleisen ratkaisun.

- Helpoimmat yhtälöt voi siis jopa päätellä, mutta alla olevien pelisääntöjen avulla ja niitä noudattamalla, pärjäät kaikissa ensimmäisen asteen yhtälöissä.

Kannattaa ehdottomasti katsoa myös opetus.tv:n esimerkit aiheesta:
https://opetus.tv/ylakoulu/matematiikka/yhtalot-1

PELISÄÄNNÖT ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖN RATKAISUUN:

* TAVOITTEENA ON SAADA TUNTEMATON (yleensä X) JÄÄMÄÄN YKSIN TOISELLE PUOLELLE = MERKKIÄ! SILLOIN YHTÄLÖ ON RATKAISTU JA TOISELLA PUOLELLA = MERKKIÄ NÄKYY VASTAUS!

* TYÖKALUINA OVAT: Plus-, miinus-, kerto- ja jakolasku

* YHTÄLÖN ELI = MERKIN **MOLEMMILLE PUOLILLE** TÄYTYY KÄYTTÄÄ AINA SAMAA TYÖKALUA

* JOS TEET AINA ALLA OLEVAT VAIHEET, PYSTYT RATKAISEMAAN KAIKKI ENSIMMÄISEN ASTEEN YHTÄLÖT. JOSKUS KAIKKIA VAIHEITA EI TARVITSE TEHDÄ.

SÄÄNTÖ	TYÖKALU JA MITEN TEHDÄÄN
1. POISTA NIMITTAJÄT (jos niitä on)	**Kerro yhtälön molemmat puolet yhteisellä jaettavalla ja supista nimittäjät pois. Muista jakaa KAIKKI yhtälön termit yhteisellä jaettavalla!** Yhteinen jaettava on luku, joka jakautuu tasan yhtälön kaikkien nimittäjien kanssa. Sen saa selville esim. kertomalla kaikki yhtälössä olevat nimittäjät keskenään.
2. LAJITTELE TERMIT YHTÄLÖN ELI = MERKIN ERI PUOLILLE	**Siirrä kaikki tuntematonta (yleensä X:ää) sisältävät termit toiselle puolelle JA muut termit toiselle puolelle = merkkiä termien ETUMERKKI vaihtaen (+ muuttuu - ja päinvastoin).**
3. LASKE YHTÄLÖN ELI = MERKIN MOLEMMAT PUOLET (jos on + tai - laskuja)	**Laske toiselta puolelta = merkkiä tuntematonta sisältävät termit**

	yhteen/vähennä. Laske myös toisella puolella olevan luvut yhteen/vähennä.
4. POISTA TUNTEMATTOMAN (yleensä X) EDESSÄ OLEVA KERROIN (jos on)	**Jaa = merkin molemmat puolet tuntemattoman (yleensä X) edessä olevalla kertoimella eli luvulla. Merkitse jakolaskut molemmille puolille, jolloin tuntemattoman edessä oleva luku supistuu pois ja se jää yksin.**
5. LASKE/SUPISTA (jos mahdollista) = MERKIN TOINEN PUOLI	**Tee jakolasku toiselta puolelta laskemalla/supistamalla. Vastaukseksi tulee supistettu murtoluku, jonka voi laskea myös desimaaliluvuksi tarvittaessa.**
6. YHTÄLÖN RATKAISU ON VALMIS!	**X on yksin toisella puolella = merkkiä ja vastaus näkyy toisella puolella!**

Esimerkkitehtävä 1: Ratkaise yhtälö

5X = 12

Työkaluja 1, 2 ja 3 ei tarvitse käyttää! Jotta tuntematon X jää YKSIN toiselle puolelle = merkkiä, täytyy enää saada kerroin 5 poistettua X:n edestä.

Otetaan työkalu 4 käyttöön eli JAETAAN yhtälön molemmat puolet X:n kertoimella 5. Tämän jälkeen supistetaan X:n edessä oleva 5 pois.

$\frac{5X}{5} = \frac{12}{5}$ → $\frac{\cancel{5}X}{\cancel{5}} = \frac{12}{5}$ → $\mathrm{X} = \frac{12}{5}$

Lopuksi työkalu 5 eli lasketaan/supistetaan vastaus

$\mathrm{X} = \frac{12}{5} = 2\,\frac{2}{5}$ (tämä on tarkka vastaus murtolukuna!)

$\mathrm{X} = \frac{12}{5}$ = 12,4 (tämä on laskimella laskettu, sattumalta myös tarkka vastaus, desimaalilukuna)

Esimerkkitehtävä 2: Ratkaise yhtälö

5X + 7 = 2X - 3

- Työkalua 1 ei tarvita, mutta 2. eteenpäin mennään. Ensin lajitellaan eli siirretään kaikki X:ää sisältävät termit vaikka vasemmalle puolelle ja muut luvut oikealle puolelle = merkkiä. MUISTETAAN vaihtaa kaikkien siirrettävien termien etumerkki vastakkaiseksi (+ → - ja päinvastoin)

-7

5X + 7 = 2X - 3 → -2X + 5X = -3 - 7

-2X

- Työkalu 3, lasketaan yhtälön eli = merkin vasen ja oikean puoli

-2X + 5X = -3 - 7 → 3X = -10

- Työkalu 4, jaetaan yhtälön molemmat puolet 3:lla. Merkitään yhtälön oikeaan reunaan pystyviiva, jonka viereen merkitään koko yhtälöön vaikuttava laskutoimitus. Supistetaan X.n edessä oleva kerroin pois.

$3X = -10 \,\big|\, :3 \quad \rightarrow \quad \frac{3X}{3} = \frac{-10}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{\cancel{3}X}{\cancel{3}} = \frac{-10}{3} \quad \rightarrow \quad X = \frac{-10}{3}$

- Työkalu 5, Lasketaan/supistetaan vastaus

$X = -3\frac{1}{3}$ tarkkana murtolukuna tai epätarkkana desimaalina $X \approx -3{,}33$

<u>Esimerkkitehtävä 3: Ratkaise yhtälö</u>

$8 + \frac{5X}{3} = \frac{7}{2} + 6X$

- Koska yhtälössä on nimittäjiäkin, otetaan kaikki työkalut käyttöön. Työkalu 1, poistetaan nimittäjät kertomalla yhtälön kaikki termit yhteisellä jaettavalla.

- Nimittäjinä ovat luku 3 ja 2. Mikä luku voidaan jakaa sekä 2:lla että 3:lla tasan? Voit päätellä sen itse tai kertoa nimittäjät keskenään saadaksesi yhteisen jaettavan. Kerrotaan nimittäjät $3 \cdot 2 = 6$
Luku 6 voidaan jakaa sekä 3:lla että 2:lla tasan eli se on yhteinen jaettava!

- Kerrotaan siis yhtälön <u>**kaikki**</u> termit luvulla 6. Merkitään yhtälön oikeaan reunaan pystyviiva, jonka viereen merkitään koko yhtälöön vaikuttava laskutoimitus. Sulut muistuttavat, että kertolasku koskee koko termiä!

$8 + \frac{5X}{3} = \frac{7}{2} + 6X \,\big|\, \cdot 6 \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 8 + 6 \cdot \left(\frac{5X}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) + 6 \cdot 6X$

- Supistetaan nimittäjät pois ja kerrotaan kaikki kertolaskut

$6 \cdot 8 + \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \left(\frac{5X}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) = \overset{3}{\cancel{6}} \cdot \left(\frac{7}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) + 6 \cdot 6X \quad \rightarrow \quad 6 \cdot 8 + 2 \cdot 5X = 3 \cdot 7 + 6 \cdot 6X \quad \rightarrow \quad 48 + 10X = 21 + 36X$

- Seuraavaksi työkalu 2 eli siirretään X-termit toiselle ja muut toiselle puolelle = merkkiä, siirrettävien etumerkki vaihtaen

$48 + 10X = 21 + 36X \quad \rightarrow \quad 10X - 36X = 21 - 48$

- Työkalu 3 eli lasketaan vasen ja oikea puoli

$10X - 36X = 21 - 48 \quad \rightarrow \quad -26X = -27$

- Työkalu 4 eli jaetaan X:n edessä oleva luku pois jakamalla yhtälö -26:lla.

$-26X = -27 \,\big|\, : -26 \quad \rightarrow \quad \frac{-\cancel{26}X}{-\cancel{26}} = \frac{-27}{-26} \qquad X = \frac{-27}{-26}$

- Työkalu 5 eli lasketaan/supistetaan tulos. Merkkisäännön mukaan parillinen määrä - merkkejä jakolaskussa antaa tulokseksi + vastuksen!

$X = \frac{-27}{-26} = \frac{27}{26} = 1\frac{1}{26}$ (tarkka vastaus) $= 1{,}0384615843 \approx 1{,}04$

5) YHTÄLÖT ONGELMARATKAISUISSA

- Yhtälöillä voidaan ratkaista monenlaisia käytännön ja matematiikan ongelmia. Sanallisista ongelmista luodaan yhtälö, joka ratkaistaan yhtälöratkaisun keinoin. Otetaan pari esimerkkiä:

Esimerkkitehtävä 1: Kun luku kerrotaan viidellä ja tuloon lisätään 12 saadaan luku 85. Mikä on kysytty luku?

Ratkaisu: Merkitään kysyttyä lukua vaikka X kirjaimella ja kirjoitetaan yhtälö

$X \cdot 5 + \underbrace{12 = 85}_{-12}$ siirretään + 12 toiselle puolelle = merkkiä etumerkki vaihtaen

$X \cdot 5 = 85 - 12$ >>> $X \cdot 5 = 73$ lasketaan vähennyslasku oikealta puolelta

$X \cdot 5 = 73 \mid :5$ jaetaan yhtälön molemmat puolet 5:llä

$\frac{X \cdot \cancel{5}}{\cancel{5}} = \frac{73}{5}$ 5 supistuu oikealta puolelta >>> lasketaan oikea puoli vastaukseksi

$X = 14\frac{3}{5} = \underline{\underline{14{,}6}}$

Esimerkkitehtävä 2: Tuotteen myyntihinta oli 270 e. Tuotteen alkuperäiseen hintaan on lisätty arvonlisäveroa 24 %. Laske tuotteen veroton hinta.

Ratkaisu: Merkitään tuotteen verotonta hintaa X kirjaimella. Verottomaan hintaan siis lisätään vielä 24 % verottomasta hinnasta. 24 % voidaan merkitä kertoimella 0,24

Muodostetaan yhtälö:

$X + 0{,}24 \cdot X = 270$ e

Yhtälön vasemmalta puolelta otetaan X yhteiseksi tekijäksi eli jaetaan vasen puoli X:llä

$X \cdot (1 + 0{,}24) = 270$ e >> $X \cdot 1{,}24 = 270$ e

Yhtälö jaetaan puolittain X:n edessä olevalla kertoimella 1,24 ja supistetaan

$X \cdot 1{,}24 = 270 \text{ e} \mid :1{,}24$ >> $\frac{X \cdot \cancel{1{,}24}}{\cancel{1{,}24}} = \frac{270\ e}{1{,}24}$

$X = 217{,}741935 \text{ e} \approx \underline{\underline{217{,}74 \text{ e}}}$

HYVÄ MUISTISÄÄNTÖ SIIS: ARVONLISÄVEROTON HINTA SAADAAN JAKAMALLA VEROLLINEN HINTA 1,24 :llä!!!!

<u>Esimerkkitehtävä 3 (ammattikorkeakoulun pääsykoe 2012):</u> Erään tuotteen valmistuskustannukset raaka-aineiden osuus on 68 % ja palkkojen osuus 32 %. Jos työntekijät saavat 5 % palkankorotuksen, niin kuinka monta prosenttia tuotteen valmistuskustannukset kasvavat?

Ratkaisu: Merkitään valmistuskustannuksia X kirjaimella ja prosenttilukuja kertoimilla 0,68 ja 0,32. 5 % lisäys voidaan merkitä kertoimella 1,05. Tehdään yhtälö

$0{,}65 + 0{,}35 \cdot 1{,}05 = X$ >> $0{,}65 + 0{,}3675 = X$ >> $1{,}0175 = X$

Tuotteen valmistuskustannukset kasvoivat 1,0175 -kertaisiksi. Koska yli 1 menevä osuus on kasvua >> kasvu oli 0,0175 -kertainen. Prosenteiksi luku muuttuu, kun se kerrotaan 100:lla

$0{,}0175 \cdot 100\,\% = 1{,}75\,\% \approx \underline{\underline{1{,}8\,\%}}$

VINKKI: Usein prosenttilaskuja kannattaa ratkaista yhtälöratkaisun avulla!